

I) (8 points)

Formaliser les propositions suivantes et construire leurs tables de vérité :

- 1) René et Simon sont coupables si Paul et Quentin sont coupables.
- 2) La culpabilité conjointe de Paul et de Quentin d'une part implique celle de René et d'autre part implique celle de Simon.
- 3) L'innocence de l'un au moins parmi René et Simon entraîne l'innocence de l'un au moins parmi Paul et Quentin.
- 4) René et Simon sont coupables d'une part si Paul est coupable, et d'autre part si Quentin est coupable.

On notera :  $p$  (resp.  $q, r, s$ ) : Paul (resp. Quentin, René, Simon) est innocent.

On a alors immédiatement les formalisations suivantes :

Pour 1 :  $pq \rightarrow rs$  (formule A)

Pour 2 :  $(pq \rightarrow r)(pq \rightarrow s)$  (formule B, conjonction, dans l'ordre, de  $B_1$  et  $B_2$ )

Pour 3 :  $\bar{r} \vee \bar{s} \rightarrow \bar{p} \vee \bar{q}$  (formule C)

Pour 4 :  $(p \rightarrow rs)(q \rightarrow rs)$  (formule D, conjonction, dans l'ordre, de  $D_1$  et  $D_2$ ).

On peut alors construire les tables de vérité :

$p$	$q$	$r$	$s$	$pq$	$rs$	A	$B_1$	$B_2$	B	$\bar{r} \vee \bar{s}$	$\bar{p} \vee \bar{q}$	C	$D_1$	$D_2$	D
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

On remarque que les formules A, B et C ont la même table de vérité, mais que celle-ci est différente de celle de la formule D.

II) (12 points)

Quatre étudiants de philosophie, que nous appellerons fois Popper, Quine, Russell et Spinoza (les véritables noms ont été modifiés par souci de sécurité) sont soupçonnés d'avoir bombé à l'arrêt du bus en face de la Faculté le slogan « Les riches sont pauvres ». Ils sont interrogés par l'Obersturnführer le Doyen Boursier, qui considère que cela porte atteinte à l'image de sa Faculté, et désire savoir qui parmi eux est innocent et qui est coupable. Mais traumatisés par leurs cours de logique, comme tous les étudiants de philosophie, ils sont incapables de répondre simplement, et font les déclarations suivantes.

Popper : Si je suis coupable, alors d'une part Russell l'est aussi et d'autre part Quine et Spinoza sont innocents ; mais si Quine est innocent, alors d'une part Russell est coupable et d'autre part mon innocence équivaut à la culpabilité de Spinoza..

Quine : Si Popper est innocent, alors d'une part je le suis aussi et d'autre part Russell et Spinoza sont coupables ; mais si je suis coupable, alors Russell et Spinoza sont innocents.

Russell : Si mon innocence équivaut à celle de Quine, alors Popper est innocent ; si Popper et moi nous sommes innocents, alors d'une part Quine l'est aussi mais d'autre part Spinoza est coupable ; cependant, si d'une part Quine est coupable et d'autre part je suis innocent, alors Spinoza est innocent.

Spinoza : L'un de nous au moins est innocent ; si Popper et moi nous le sommes, alors Quine l'est aussi ; mais si Russell et moi nous le sommes, alors Popper et Quine sont coupables.

1) En supposant que tous aient dit la vérité, à quelle conclusion parvient-on ?

2) Étrangement, les policiers ne font pas confiance à des gens qui disent s'appeler Popper, Quine, Russell et Spinoza. En supposant que tous aient menti, à quelle conclusion parvient-on ?

3) On peut penser que les coupables aient intérêt à mentir, mais non les innocents. En supposant que les coupables ont menti et que les innocents ont dit la vérité, à quelle conclusion parvient-on ?

4) Les logiciens sont des gens bizarres. En supposant que les coupables ont dit la vérité et que les innocents ont menti, à quelle conclusion parvient-on ?

On va formaliser les déclarations de chacun des suspects, en notant  $p$  (resp.  $q$ ,  $r$ ,  $s$ ) la proposition élémentaire « Popper (resp. Quine, ...) est coupable », et  $P$  (resp.  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ ) la déclaration de Popper (resp. Quine, ...).

On a immédiatement :

$P : (\bar{p} \rightarrow \bar{r}qs)(q \rightarrow \bar{r}(p \leftrightarrow \bar{s}))$  (soit, pour la table de vérité :  $P_1P_2$ )

$Q : (p \rightarrow q\bar{r}\bar{s})(\bar{q} \rightarrow rs)$  (soit, pour la table de vérité :  $Q_1Q_2$ )

$R : ((r \leftrightarrow q) \rightarrow p)(pr \rightarrow q\bar{s})(\bar{q}r \rightarrow s)$  (soit, pour la table de vérité :  $R_1R_2R_3$ )

$S : (p \vee q \vee r \vee s)(ps \rightarrow q)(rs \rightarrow \bar{p}\bar{q})$  (soit, pour la table de vérité :  $S_1S_2S_3$ )

$p$	$q$	$r$	$s$	$P_1$	$p \leftrightarrow \bar{s}$	$\bar{r}(p \leftrightarrow \bar{s})$	$P_2$	$P$	$Q_1$	$Q_2$	$Q$	$r \leftrightarrow q$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R$	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S$
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
0	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0

1) Si tous ont dit la vérité, on doit trouver des 1 à la fois dans la colonne de P, celle de Q, celle de R et celle de S. C'est le cas en quatrième ligne (Popper et Quine innocents, Russell et Spinoza coupables) et en ligne 11 (Popper et Russell coupables, Quine et Spinoza innocents). On peut donc être sûr que Russell est coupable, que Quine est innocent, et que le statut de Popper est différent de celui de Spinoza.

2) Si tous ont menti, on doit trouver des 0 à la fois dans la colonne de P, celle de Q, celle de R et celle de S. C'est le cas à la fois en ligne 1 et en ligne 16. Ils sont donc tous innocents, ou tous coupables.

3) On cherche dans quelles lignes du tableau la configuration des 1 et des 0 est la même dans les colonnes  $p, q, r, s$  et dans les colonnes P, Q, R, S. C'est le cas en lignes 15 ( $\bar{p}\bar{q}\bar{r}s$ ) et 16 ( $\bar{p}\bar{q}\bar{r}\bar{s}$ ) : Popper, Quine et Russell sont donc coupables ; on ne peut se prononcer en ce qui concerne Spinoza.

4) On cherche dans quelles lignes du tableau la configuration des 1 et des 0 est inversée dans les colonnes P, Q, R, S par rapport aux colonnes  $p, q, r, s$ . Ce n'est le cas qu'en ligne 16 : les quatre suspects sont donc coupables.